

Є.О. Гоцуляк, д-р техн. наук  
 Є.С. Дехтярюк, д-р техн. наук  
 О.О. Лук'яненко, канд. техн. наук

## ВИЗНАЧЕННЯ ОБЛАСТЕЙ ДИНАМІЧНОЇ НЕСТІЙКОСТІ ПАРАМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ ГОФРОВАНОЇ ДВОТАВРОВОЇ БАЛКИ

Побудована розрахункова модель динамічної стійкості плоскої форми згину двотаврової балки з гофрованою стінкою. Редукування дискретної скінченноелементної моделі балки виконано за допомогою методу узагальнених координат. Досліджена динамічна стійкість параметричних коливань балки при дії розподіленого навантаження. Визначені границі областей нестійкості балки при головних та комбінованих параметричних резонансах.

В різних несучих конструктивних елементах плоскі стінки, що посилені для підвищення їх стійкості ребрами жорсткості, вже давно замінюються більш жорсткими гофрованими. Відсутність достатньо надійних даних про роботу гофрованих конструкцій під навантаженням, про методи їх проектування та розрахунку, не дає змогу більш широкому їх застосуванню.

Метою роботи є дослідження динамічної стійкості параметричних коливань двотаврової балки з гофрованою синусоїдальною стінкою при дії розподіленого навантаження. Двотаврова гофрована балка має такі геометричні характеристики:  $l=1000$  мм,  $h=200$  мм,  $b=80$  мм,  $\delta_n=4$  мм,  $\delta_{cm}=1,5$  мм. Пружні характеристики відповідають матеріалу сталь:  $E=2,06E11$  Па;  $\mu=0,3$ ;  $G=0,792E11$  Па. Двотаврова гофрована балка розглядається як система, що складається з двох поясів, гофрованої стінки та граничних ребер жорсткості. Розрахункова модель балки побудована за

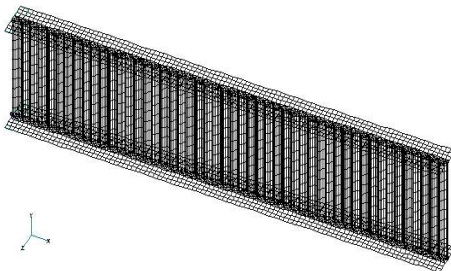


Рис. 1. Скінченноелементна модель балки

допомогою обчислювального комплексу скінченно-елементного аналізу і містить 7227 вузлів та 8020 елементів (рис. 1). Стінка та полки моделюються пластинчатими елементами, граничні ребра жорсткості – балочними. Поперечний переріз балки та геометричні параметри гофра (глибина  $f$  та довжина  $a$ ) наведені на рис. 2.

Розподілене навантаження є параметричним навантаженням, що викликає плоску форму згину балки з площини її стінки. Воно прикладається до вузлів, що розташовані посередині стінки балки вздовж її довжини, і дорівнює  $q(t) = q_0 + q_1 \cos \omega t$ . Амплітуда статичної складової навантаження приймається рівною  $q_0 = 100 \text{ Н}$  на кожен вузол або  $q_0 = 25525 \text{ Н}$  на 1 м довжини синусоїдальної гофрованої стінки балки.

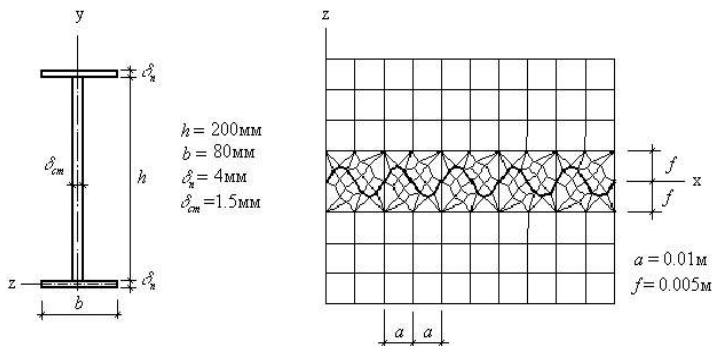


Рис. 2. Поперечний переріз балки та параметри синусоїдального гофра

Методика побудови редукованих рівнянь динамічної стійкості плоскої форми згину пружних систем представлена в статті [1]. Редукована розрахункова модель балки формується за допомогою методу узагальнених координат з використанням процедур сучасного програмного комплексу скінченноелементного аналізу. Вона визначається своїми редукованими матрицями мас, жорсткості та геометричної жорсткості і має вигляд:

$$M^* \ddot{\bar{y}}(t) + K^* \bar{y}(t) + \varphi(t) K_G^* \bar{y}(t) = 0, \quad (1)$$

де  $M^*, K^*, K_G^*$  - редуковані матриці мас, жорсткості та геометричної жорсткості відповідно,  $\bar{y}(t)$  - вектор узагальнених координат.

Обчислювальний комплекс скінченноелементного аналізу формує матрицю власних форм, що нормована по матриці мас, тобто  $\bar{\varphi}_i^T \dot{A} \bar{\varphi}_i = \dot{A}$ , де  $\dot{A} = \text{diag}(1, 1)$ . Тому матриця жорсткості представляє собою діагональну матрицю, члени якої є квадратами частот власних згинальних та крутильних коливань балки, які отримані при розв'язанні задачі на власні коливання  $K^* = \text{diag}(\omega_{1u}^2, \omega_{1y}^2)$ . На рис. 3 представлені форми згинальних та крутильних власних коливань балки та відповідні частоти.

Для перевірки редукування математичної моделі динамічної стійкості параметричних коливань балки (1) матриця жорсткості також визначена за допомогою обчислювальної комплексу при знаходженні в докритичному напруженому стані реакції конструкції на узагальнені переміщення, які описують форми коливань, що нормовані з урахуванням малого параметру  $K^* = \text{diag}(\bar{\varphi}_1^T K \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2^T K \bar{\varphi}_2)$ . Перевірка показала, що значення членів матриці жорсткості співпадають зі значеннями квадратів частот власних коливань балки

$$K^* = \begin{bmatrix} 789583,2104 & 0 \\ 0 & 1096132,617 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

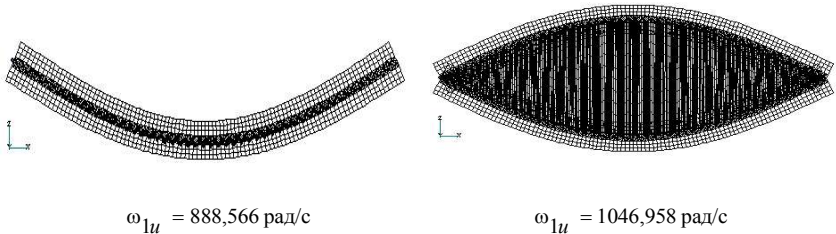


Рис. 3. Перші форми власних згинальних та крутильних коливань

Для побудови редукованої матриці геометричної жорсткості застосована процедура розв'язання задачі нелінійної статки при поетапному навантаженні пружної системи. Побудова матриці геометричної жорсткості виконується за допомогою згортання оператора на основі базису, що складається з форм коливань, і знаходження різниці між згорнутими операторами в околі докритичного і ненавантаженого станів[1]

$$(K^* + K_G^*) - (K^*) = K_G^*. \quad (3)$$

Сума редукованих матриць жорсткості та геометричної жорсткості обчислюється за формулою

$$(K^* + K_G^*) = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\varphi}_{1u}^T (K + K_G) \bar{\varphi}_{1\gamma} \\ \bar{\varphi}_{1\gamma}^T (K + K_G) \bar{\varphi}_{1u} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Редукована розрахункова модель динамічної стійкості параметричних коливань гофрованої балки набуває вигляду

$$\begin{cases} \ddot{u}_k + 888,566^2 [u_k - 0,055184\varphi(t)\gamma_k] = 0, \\ \ddot{\gamma}_k + 1046,958^2 [\gamma_k - 0,038508\varphi(t)u_k] = 0, \end{cases} \quad (k = 1,2,3\dots) \quad (5)$$

Задача побудови редукованої моделі динамічної стійкості параметричних коливань гофрованої балки з реальними геометричними параметрами є складною і розрахована на застосування обчислювальних засобів з великими ресурсами та швидкодійними процесорами. Для зменшення об'ємів вхідних даних в роботі виконується побудова редукованої моделі гофрованої балки у вигляді еквівалентної плоскої ортотропної пластини з еквівалентними ребрами, які забезпечують згинальну жорсткість балки. Гофрована стінка має різну жорсткість на розтяг (стиск) у вертикальному та горизонтальному напрямках. Цим вона схожа на ортотропну пластинку, пружні сталі якої ( $E_1, E_2, \mu_1, G_1$ ) визначаються з рівності на розтяг та зсув гофрованої та плоскої ортотропної пластинок. Тому гофрована стінка може бути замінена еквівалентною плоскою стінкою, яка моделюється плоскими ортотропними елементами. Для синусоїдальних гофрів пружні сталі визначаються за формулами

$$E_1 = \frac{E}{\frac{6}{\sin \beta_0} \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 \left(\beta_0 - \frac{3}{2} \sin 2\beta_0 + 2\beta_0 \cos^2 \beta_0\right)}; \quad (6)$$

$$E_2 = \frac{\beta_0}{\sin \beta_0} E, \quad G_1 = \frac{E}{2(1+\mu)} \frac{\sin \beta_0}{\beta_0}, \quad \mu_1 = \mu \frac{E_1}{E_2}. \quad (7)$$

Тут  $R$  - радіус хвилі гофра у вигляді кола;  $\delta$  - товщина стінки гофра;  $2\beta_0$  - центральний кут півхвилі гофра;  $E$  - модуль пружності матеріалу стінки балки;  $\mu$  - коефіцієнт Пуасона матеріалу стінки.

Згідно формул (6) та (7) пружні сталі гофрованої балки в роботі приймаються такими:  $E_1 = 0,01E$ ;  $E_2 = 1,5E$ ;  $\mu_1 = 0,002$ ,  $\mu_2 = 0,3$ ;  $G_1 = 0,257E$ . Полки та опорні ребра моделюються балочними елементами. Кількість вузлів моделі складає 2121, кількість елементів - 2240. Розподілене навантаження прикладається до вузлів, що розташовані посередині стінки балки вздовж її довжини, і дорівнює  $q(t) = q_0 \cos \omega t$ .

Амплітуда навантаження приймається рівною  $q_0 = 100$  Н на кожен вузол або  $q_0 = 10100$  Н на 1 м довжини плоскої еквівалентної стінки балки.

При дослідженні динамічної стійкості плоскої форми згину балки необхідно врахувати її згинальні характеристики із площини дії навантаження. Для цього вводяться додатково еквівалентні ребра, що моделюються у вигляді стержневих скінчених елементів. Поперечний переріз еквівалентного ребра приймається із врахуванням вимоги

$$A_{cm} + A_p = A_{гоф}. \quad (8)$$

Тут  $A_{cm}$  - площа еквівалентної плоскої стінки довжиною в півхвилі ( $A_{cm} = l_{cm} \times \delta_{cm}$ ),  $A_{гоф}$  - площа синусоїдального гофра довжиною в півхвилі ( $A_{гоф} = \pi \times R \times \delta_{cm}$ ). Та вимоги рівності осьового моменту інерції еквівалентного ребра моменту інерції синусоїдального гофра, що визначається за формулою

$$I_{гоф} = 2t_w f^2 \left[ 1 - \frac{0,81}{1 + 2,5 \left( \frac{f}{a} \right)} \right] \times a, \quad (9)$$

де  $t_w = 1,5$  мм - товщина стінки,  $f = 4,96$  мм - глибина гофра,  $a = 10,68$  мм - довжина півхвилі гофра.

За розрахунком момент інерції гофра  $I_{гоф} = 3.74 \times 10^{-10} \text{ м}^4$ , площа поперечного перерізу еквівалентного ребра  $A_p = 8.37 \times 10^{-6} \text{ м}^2$ . З урахуванням того, що осьовий момент інерції еквівалентного ребра при моделюванні його поперечного перерізу у вигляді прямокутника повинен дорівнювати  $I = bh^3 / 12$ , приймаємо  $b_p = 0,00036$  м та  $h_p = 0,02324$  м. Еквівалентні ребра встановлюються зі кроком довжини півхвилі синусоїдального гофра.

Формування редукованих рівнянь, що описують динамічну стійкість плоскої форми згину гофрованої балки, виконується аналогічно алгоритму наведеному для двотаврової балки з реальними гофрами. На рис. 4 представлені згинальна та крутильна форми власних коливань двотаврової балки, що моделювалася у вигляді плоскої еквівалентної ортотропної пластини з еквівалентними ребрами жорсткості.

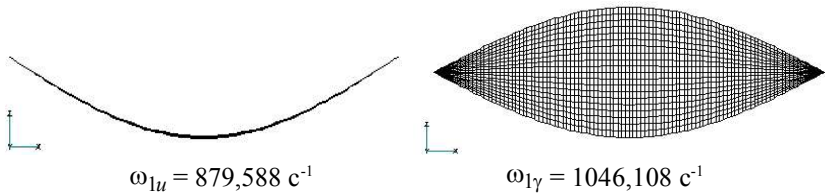


Рис. 4. Перші форми власних згинальних та крутильних коливань  
Матриці жорсткості та геометричної жорсткості набувають вигляду

$$K^* = \begin{bmatrix} 773626,64 & 0 \\ 0 & 1094332,84 \end{bmatrix}; \quad (10)$$

$$K_G^* = \begin{bmatrix} 0 & -13085,57 \\ -13088,36 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Редукована розрахункова модель динамічної стійкості параметричних коливань двотаврової балки у вигляді плоскої еквівалентної ортотропної пластини з еквівалентними ребрами жорсткості набуває вигляду

$$\begin{cases} \ddot{u}_k + 879.588^2 [u_k - 0.0169 \wp(t) \gamma_k] = 0, \\ \ddot{\gamma}_k + 1046.108^2 [\gamma_k - 0.01196 \wp(t) u_k] = 0, \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (12)$$

Дана оцінка впливу розрахункових моделей гофрованої двотаврової балки на коефіцієнти матриць її редукованої моделі (1).

Таблиця 1

Модель балки	Перші частоти згинальних та крутильних коливань, с <sup>-1</sup>		$q_{кр}$ , Н/м	Коефіцієнти редукованих рівнянь динамічної параметричних коливань гофрованої балки			
	$\omega_u$	$\omega_{1\gamma}$		$\bar{a}_{12}$	$\bar{a}_{21}$	$\bar{a}_{12} \times q_{кр}$	$\bar{a}_{21} \times q_{кр}$
Балка з синусоїдальним и гофрами	888.56 6	1046.10 8	365510	$2.161 \times 10^{-6}$	$1.508 \times 10^{-6}$	0.724031	0.511980
Еквівалента ортотропна пластинна з еквівалентними ребрами	879.58 8	1046.95 8	432361	$1.674 \times 10^{-6}$	$1.184 \times 10^{-6}$	0.789502	0.551429

Перші власні форми і частоти згинальних та крутильних коливань близькі за значенням. Для двох видів розрахункових моделей гофрованої балки коефіцієнти рівнянь динамічної стійкості параметричних коливань для одиничної статичної складової навантаження з урахуванням значень критичних навантажень, які отримані при розв'язанні статичної задачі втрати стійкості, ( $\bar{a}_{12} \times q_{кр}$ ;  $\bar{a}_{21} \times q_{ед}$ ) мало відрізняються.

Дослідження динамічної стійкості параметричних коливань гофрованої балки при дії розподіленого навантаження полягало у визначенні областей нестійкості. Досліджувались головні та комбіновані параметричні резонанси. Головні резонанси відбуваються при частотах зовнішнього навантаження, що дорівнюють подвоєній частоті згинальних та крутильних власних коливань завантаженої балки. Границі областей нестійкості та власні частоти завантаженої балки визначалися за допомогою формул Болотіна та Якубовича [2, 3].

На рис. 5, а, б представлені області динамічної нестійкості параметричних коливань гофрованої балки відповідно при першому та другому головних резонансах для різних значень статичної та динамічної складових розподіленого навантаження.

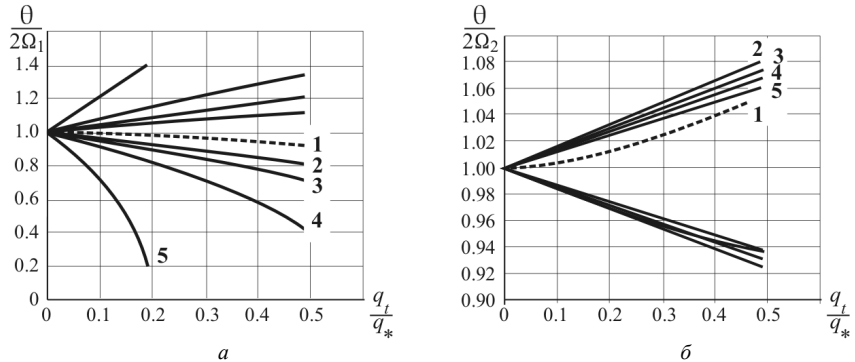


Рис. 5. Области нестійкості гофрованої балки при першому і другому головних резонансах: 1)  $q_0=0$ ; 2)  $q_0=0.3q_*$ ; 3)  $q_0=0.5q_*$ ; 4)  $q_0=0.7q_*$ ; 5)  $q_0=0.9q_*$ .

Області нестійкості або області збудження - це області, в яких будь яке початкове відхилення буде необмежено збільшуватися з часом, тобто прямиолінійна форма балки буде динамічно нестійкою. Ці області мають границі, які відповідають умові, при якій диференціальні рівняння мають періодичні або майже періодичні розв'язки з періодами  $T$  та  $2T$ . Видно, що ширина області нестійкості при першому головному резонансі

збільшується при збільшенні як статичної так і динамічної складової. Для другого головного параметричного резонансу ширина області нестійкості залежить лише від динамічної складової навантаження. Область нестійкості при першому головному резонансі більше за область другого головного резонансу.

На рис. 6,а представлено порівняння областей нестійкості при першому та другому головних резонансах, що отримані за різними формулами, при статичній складовій  $0.5q_{ст}$ . Видно, що границі областей нестійкості при другому головному резонансі незначно відрізняються.

В роботі також були порівняні частоти власних коливань завантаженої гофрованої балки, які отримані за формулами Якубовича, Болотіна та обчислювального комплексу при розв'язанні задачі на власні коливання з урахуванням матриці геометричної жорсткості балки (рис. 6,б). Частоти, що отримані за формулою Болотіна та обчислювального комплексу співпадають. Обчислення за формулою Якубовича при зростанні статичної складової параметричного навантаження відрізняються від значень отриманих іншими способами.

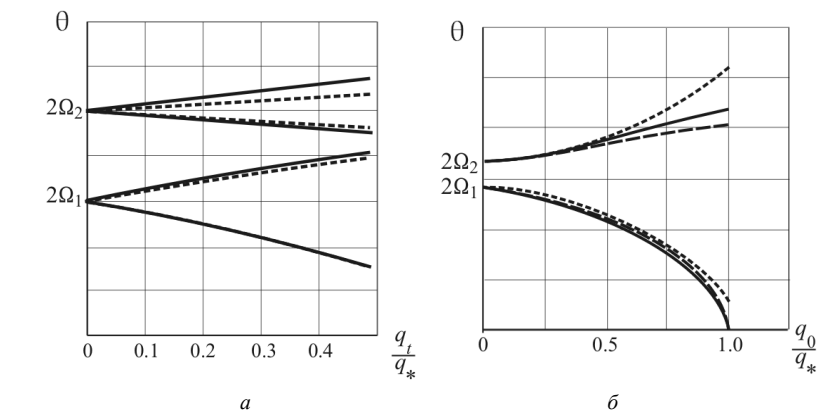


Рис. 6. Порівняння областей нестійкості гофрованої балки при першому і другому головних резонансах

— ( — формула Якубовича, - формула Болотіна, - НАСТРАН)

На рис. 7 представлені області динамічної нестійкості балки при комбінованому резонансі, що отримані за формулами Якубовича [3].

При збільшенні статичної складової навантаження ширина області нестійкості однакова, але частота збудження зменшується і області нестійкості зміщуються вниз.



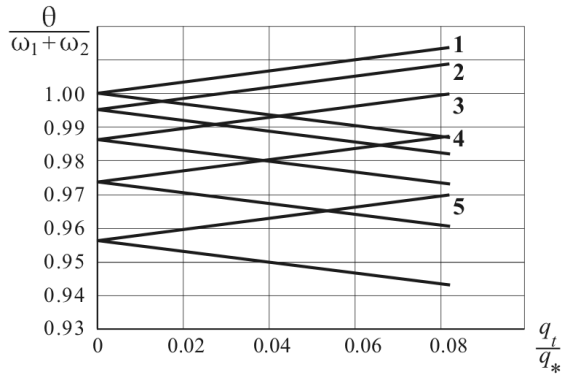


Рис. 7. Области нестійкості гофрованої балки при комбінаційному резонансі:  
1)  $q_0=0$ ; 2)  $q_0=0.3q_*$ ; 3)  $q_0=0.5q_*$ ; 4)  $q_0=0.7q_*$ ; 5)  $q_0=0.9q_*$

На рис. 8,а,б представлені області нестійкості при двох головних та комбінованому параметричних резонансах гофрованої балки при двох значеннях статичної складової навантаження.

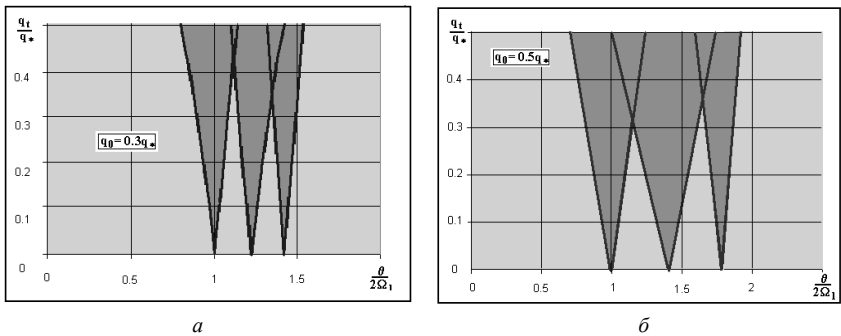


Рис. 8. Области нестійкості гофрованої балки

Динамічна стійкість незабезпечена при значеннях статичної та динамічної складових навантаження, що відповідають темно-синій області.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гоцуляк Є.А., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Борисенко В.Г. Методика редукування рівнянь в задачах параметричних коливань конструкцій //Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА. – 2004. -№74.
2. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. - М.: Гостехиздат, 1956 - 600 с.
3. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972 - 718 с.
4. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т./Ред. совет: В.Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1978—Т. 1. Колебания линейных систем /Под ред. В.В. Болотина. 1978. 352 с., ил.
5. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. - М.: ДМК Пресс, 2001.- 448 с.

Отримано 08.05.09

Построена расчетная модель динамической устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки с гофрированной стенкой. Редуцирование дискретной конечноэлементной модели балки выполнено с помощью метода обобщенных координат. Исследована динамическая устойчивость параметрических колебаний балки при действии распределенной нагрузки. Определены границы областей неустойчивости балки при главных и комбинированных параметрических резонансах.

The model of dynamic stability of j-beam with the corrugated wall flat bending is built. The reducing of discrete finite elements model is executed with the use of the generalized coordinates method. Dynamic stability of beam parametric oscillation under the pressure is investigated. The borders of instability areas are determined at main and combined parametric resonances.